

数学ノート

概要

定積分で図形の面積を求めることができます。それと同じ感覚で反復積分を考えることができます。

目次

1	反復積分	2
1.1	線分の長さ	2
1.2	面積	2
1.3	体積	2

1 反復積分

1.1 線分の長さ

例 1 $A(2), B(5)$ のとき、線分 AB の長さを求める。

$$(\text{解}) AB = 5 - 2 = 3$$

また、積分を用いても得られる。

$$AB = \int_2^5 dx = [x]_2^5 = 5 - 2 = 3$$

一般に、 $A(x_1), B(x_2) (x_1 \leq x_2)$ のとき、 $AB = \int_{x_1}^{x_2} dx$

1.2 面積

例 2 直線 $y = 0, y = 1, x = x_1, x = x_2 (x_1 \leq x_2)$ で囲まれた長方形の面積 S を求める。

$$(\text{解}) S = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

例 3 $\begin{cases} \text{曲線 } y = f_2(x), y = f_1(x) (f_1 < f_2) \\ \text{直線 } x = x_1, x = x_2 (x_1 \leq x_2) \end{cases}$ で囲まれた図形の面積 S を求める。

$$(\text{解}) S = \int_{x_1}^{x_2} (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

ところで、 $f_2(x) - f_1(x) = [y]_{f_1(x)}^{f_2(x)} = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy$ より、 $S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy dx$ となる。

ここで、 $y_1 = f_1(x), y_2 = f_2(x)$ と表せば、

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dy dx$$

1.3 体積

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dy dx \text{ は、} \begin{cases} \text{直線 } x = x_1, x = x_2 \\ \text{曲線 } y = y_1, y = y_2 \\ \text{平面 } z = 1 \end{cases} \text{ で囲まれた、立体の体積になる。}$$

よって、 $\begin{cases} \text{直線 } x = x_1, x = x_2 \\ \text{曲線 } y = y_1, y = y_2 \\ \text{平面 } z_1 = g_1(x, y), z_2 = g_2(x, y) \end{cases}$ で囲まれた、立体の体積は、

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} dz dy dx \text{ で求めることができる。}$$

以下、次々と同様なことを続けることができる。このような積分を反復積分という。