実数列の極限

概 要

$\varepsilon - \delta$ 論法で実数の連続性を論じることができます。

目 次

1　実数列の収束

実数の全体を $\mathbf{R}$ で表す。数直線は、直線上の点 P に実数 p を対応させたものです。

1.1　lim

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ を実数列とし、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と書く。

例 1 $\alpha = 1.4142\cdots (= \sqrt{2})$ を考える。これを、次のように考える。

$$a_1 = 1.4, a_2 = 1.41, a_3 = 1.414, \cdots, a_n = 1.4142\cdots\Box \ (\Box\text{は小数第}\ n\ \text{位})$$

n を限りなく大きくすると、a_n は限りなく α に近づくことがわかる。■

定義 1 n を限りなく大きくすると、a_n は限りなく α に近づくとき、

$$n \to \infty \text{ のとき、} a_n \to \alpha$$

と書く。そして、$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は α に**収束する**と言う。また、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

とも書く。■

さらに例 1 を深く考えてみる。もし、有理数だけなら、極限は存在しない。だから、有理数にはない実数の性質であると考えられる。さて、実数に戻る。a_n は α に近づくから、その差はいくらでも 0 に近づく。

$$|a_1 - \alpha| = 0.0142\cdots, |a_2 - \alpha| = 0.0042\cdots, |a_3 - \alpha| = 0.0002\cdots, \cdots$$

定義 2 $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ は α に収束するとき、
どんな正の数 ε を与えても、適当に $m \in \mathbf{N}$ を選べば、すべての自然数 $n \geqq m$ に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

とできる。また、

$$\forall\varepsilon > 0, \exists m \in \mathbf{N}, \forall n \geqq m (|a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

とも書く。■

この定義が $\varepsilon - \delta(m)$ 論法である。さて、同じ内容を色んな書き方をしていることに注意しよう。

命題 1 収束する実数列の極限はただ 1 つに限る。

[証明] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$ とおく。任意の正の数 ε に対し、適当に $m \in \mathbf{N}$ を選べば、全ての自然数 $n \geqq m$ に対して、$|a_n - \alpha| < \varepsilon, |a_n - \beta| < \varepsilon$ とできる。よって、

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - a_n + a_n - \beta| \leqq |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| < 2\varepsilon$$

ゆえに、$\alpha = \beta$ ■
さて、この証明で、ε の代わりに $\dfrac{\varepsilon}{2}$ を考えれば最後の 2ε が ε になる。

1.2 有界

A を $\mathbf{R}$ の空でない部分集合とする。

定義 3 適当に実数 a を選べば、A のすべての元 x が $x \leqq a$ となるとき、A は **上に有界** であるという。この実数 a を A の**上界** という。また

$$\exists a \in \mathbf{R}, \forall x \in A(x \leqq a)$$

と書く。■

定義 4 適当に実数 a を選べば、A のすべての元 x が $a \leqq x$ となるとき、A は **下に有界** であるという。この実数 a を A の**下界** という。■

定義 5 A が上にも下にも有界なとき、A は**有界**であると言う。

これは次のようにも言える。

定義 6 適当に実数 a を選べば、A のすべての元 x が $|x| \leqq a$ となるとき、A は **有界** であるという。

命題 2 収束する実数列 $\{a_n\}$ は有界である。

[証明]
$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおく。だから、
$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists m \in \mathbf{N}, \forall n \geqq m$ に対して、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ とできる。
とくに、$\varepsilon = 1$ とすれば、 $|a_n - \alpha| < 1$
よって、$|a_n| - |\alpha| \leqq |a_n - \alpha| < 1$
$\therefore |a_n| < |\alpha| + 1$
ゆえに、
$M = max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \cdots, |a_m|, |\alpha| + 1\}$
とおけば、
$\forall n \in \mathbf{N}$ に対して、$|a_n| < M$
となる。よって、収束する数列は有界である。■

2　実数の連続性

実数の連続性について述べる。A を $\mathbf{R}$ の空でない部分集合とする。

2.1　上限

A が上に有界のとき、

$$x \leqq a$$

となる実数 a がある。a が上界なら、a より大きい数は全て上界となる。上界全体について次の性質がある。

公理 1 実数の連続性
A が上に有界ならば、A の上界全体の集合には最小数 α が存在する。

これは、例 2 の $\lim_{n\to\infty} a_n$ が収束することを保証するものであることに注意したい。

定義 7 この α を A の**上限**といい、$\sup A$ と書く。

さて、$\alpha = \sup A$ は、A の上界、かつ上界の最小数だから次のように言い換えることができる。

(1) 全ての $x \in A$ に対して、$x \leqq \alpha$
(2) どんな正の数 ε を与えても、$\alpha - \varepsilon$ は A の上界ではないから、$\alpha - \varepsilon < x \leqq \alpha$ を満たす $x \in A$ が存在する。

これは、次のように書ける。

(1) $\forall x \in A, x \leqq \alpha$
(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A(\alpha - \varepsilon < x \leqq \alpha)$

例 2 A を上に有界とする。B を A の空でない部分集合とすると、B も上に有界であり、$\sup B \leqq \sup A$ である。

[証明] B の元は A の元だから B も上に有界である。よって、$\alpha = supA$ は B の上界である。また、$supB$ は、B の上界の最小数だから、$supB \leqq supA$ となる。

例 3 自然数の集合 $\mathbf{N}$ は上に有界でない。

[証明] $\mathbf{N}$ を上に有界とすると、上限 $\alpha = sup\mathbf{N}$ が存在する。$\varepsilon = 1$ とすれば、$\alpha - 1 < n \leqq \alpha$ を満たす自然数が n が存在する。しかし、これは矛盾。ゆえに、$\mathbf{N}$ は上に有界でない。

2.2 下限

A が下に有界のとき、

$$a \leqq x$$

となる実数 a がある。a が下界なら、a より小さい数は全て下界となる。

定理 1 A が下に有界ならば、A の下界全体の集合には最大数 α が存在する。

[証明] $B = \{-x : x \in A\}$ とおく。B は A と大小関係が逆である。よって、A の下界全体の集合には最大数が存在する。

定義 8 この α を A の**下限**といい、$\inf A$ と書く。

さて、$\alpha = \inf A$ は、A の下界、かつ下界の最大数だから次のように言い換えることができる。

(1) 全ての $x \in A$ に対して、$\alpha \leqq x$
(2) どんな正の数 ε を与えても、$\alpha + \varepsilon$ は A の下界ではないから、$\alpha \leqq x < \alpha + \varepsilon$ を満たす $x \in A$ が存在する。

例 4 A を下に有界とする。B を A の空でない部分集合とすると、B も下に有界であり、$\inf A \leqq \inf B$ である。

2.3 有界

例 5 $\mathbf{R}$ は有界でない。

[証明] $\mathbf{R}$ を上に有界とすると、$\alpha = \sup \mathbf{R}$ が存在する。全ての $x \in R$ に対して、$x \leqq \alpha$ となる。特に $x = \alpha + 1$ とすると、$\alpha + 1 \leqq \alpha$ となる。これは矛盾。

3　極限値の演算

次のような極限値の演算ができる。

命題 3 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束するとする。
(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$
(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$
(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$
さらに、$\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば、
(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$