

ニュートンの運動方程式とラグランジュの方程式

概要

ニュートンの運動方程式は、座標変換すると式が変わる。そして、その計算は大変である。その計算を軽減するために、ニュートンの運動方程式と同値な方程式を利用する方法がある。ただ、それができると示すこと自体は大変な事である。それは、空間の中を動く点を記述することにあると思う。さて、あくまでも目標はそこにあるが、数直線上を動く点に限定して考えても、十分目標に近づけると思われる。最初は、**ラグランジュの方程式**とニュートンの運動方程式は同値であることを示す。それから、具体的な座標変換の例を通して一般化をしていく。それでも、専門書を理解しやすくなると思う。

目次

1	はじめに	3
1.1	1 次の近似式	3
1.2	導関数	3
1.3	微分と記法	4
1.4	等速直線運動	4
1.5	等加速度運動	5
2	ニュートンの運動方程式	6
2.1	座標	6
2.2	速度・加速度	6
2.3	ポテンシャル関数	6
2.4	ニュートンの運動方程式	6
2.5	運動エネルギー	7
2.6	ラグランジュの方程式	7
3	座標変換	9
3.1	ニュートンの運動方程式	9
3.2	ラグランジュの方程式	9
3.3	ラグランジュの方程式 (2)	10
3.4	ラグランジュの方程式 (3)	11
3.5	ラグランジュの方程式の利用	11
3.6	ラグランジュの方程式の利用 (2)	12
4	座標変換 2	13

4.1	ニュートンの運動方程式	13
4.2	ラグランジュの方程式	13
4.3	記法	14
4.4	ラグランジュの方程式 (2)	15
4.5	ラグランジュの方程式 (3)	16
4.6	記法 (2)	17
4.7	ラグランジュの方程式の利用	19
4.8	ラグランジュの方程式の利用 (2)	20
4.9	記法 (3)	21
4.10	例	21
5	座標変換 3	23
5.1	ラグランジュの方程式	23
5.2	ラグランジュの方程式 (2)	24
5.3	ラグランジュの方程式 (3)	25

1 はじめに

ここは復習である。

1.1 1次の近似式

関数 $y = f(x)$ の**1次の近似式**とは次のようなものである。

例1 $f(x) = x^2$ のとき、

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

である。この式の h は小さい数とする。例えば、 $h = 0.1$ とする、

$$f(x+0.1) = (x+0.1)^2 = x^2 + 2x \times 0.1 + 0.01$$

さて、 h^2 はさらに小さい数になる。そこで、この h^2 を無視した次の近似式を h の1次の近似式という。

$$(x+h)^2 \approx x^2 + 2xh$$

例2 $f(x) = x^3$ のとき、

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

である。 h を小さい数とすれば、 h^2, h^3 はさらに小さい数になる。そこで、この h^2, h^3 を無視した次の近似式を h の1次の近似式という。

$$(x+h)^3 \approx x^3 + 3x^2h$$

1.2 導関数

一般に、 $y = f(x)$ において、 h を小さい数と考えたときの h の1次の近似式は、次のように表せる。

$$f(x+h) \approx f(x) + Ah$$

さて、 A を $f'(x)$ と表わし、 $f'(x)$ を $f(x)$ の導関数という。すると、1次の近似式は次のようになる。

$$\boxed{f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h}$$

前の例1、例2から次のようになる。

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 \text{ のとき、} & f'(x) = 2x \\ f(x) = x^3 \text{ のとき、} & f'(x) = 3x^2 \\ f(x) = x^n \text{ のとき、} & f'(x) = nx^{n-1} \end{aligned}$$

例 $f(x) = C$ (定数) のときは、

$$C \approx C + f'(x)h$$

より、 $f'(x) = 0$ となる。

1.3 微分と記法

z を x と y の関数とする。

$$z = z(x, y)$$

$\mathbf{x} = (x, y)$ とおけば次のように表せる。

$$z = z(\mathbf{x})$$

このとき、次のように表す。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) z = \frac{\partial}{\partial(x, y)} z = \frac{\partial z}{\partial(x, y)} = \frac{\partial z}{\partial \mathbf{x}} \\ (\dot{x}, \dot{y}) &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt}(x, y) = \frac{d(x, y)}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

例 $z = x^2 + y^3$ のとき、 $\frac{\partial z}{\partial(x, y)} = (2x, 3y^2)$

1.4 等速直線運動

質点 P が、等速直線運動をしているとする。このとき、

$$\text{速度} \cdots v$$

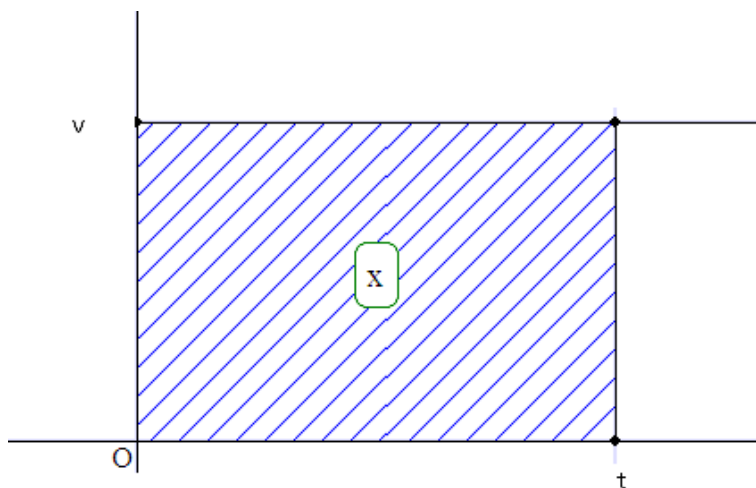
とする。このとき、時刻 t の間に動く距離 s は、

$$\text{距離} \cdots s = vt$$

となる。最初に、原点 O にいたとすれば、点 P の座標 x は、

$$\text{座標} \cdots x = vt$$

となる。さて、時刻 t と v のグラフは次のようになる。



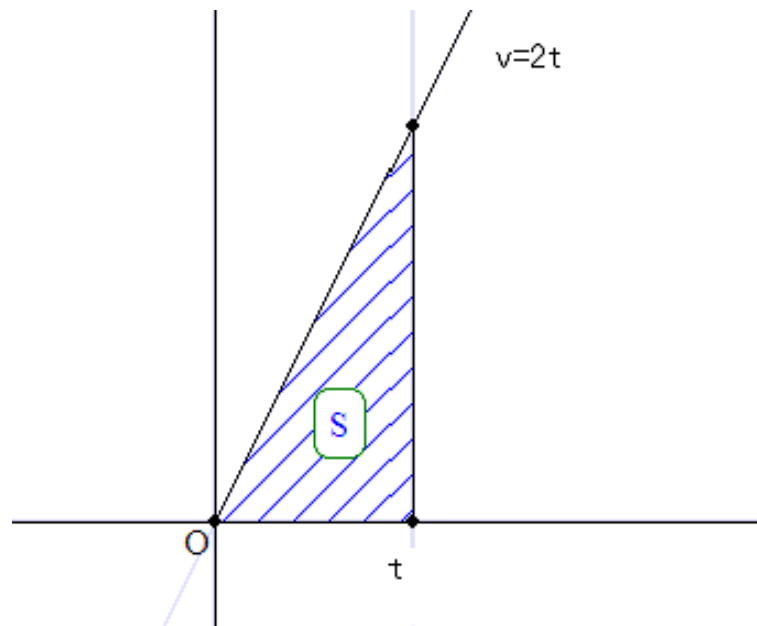
そして、図の面積は点の動いた距離になる。特に、 $t = 0$ のとき原点 O にいるとすれば、座標 x となっている。

1.5 等加速度運動

質点 P が直線上を動いているとき、速度 v が、時刻 t によって、次のように変化しているとする。

$$\text{速度} \cdots v = 2t$$

さて、時刻 t と v のグラフは次のようになる。



このとき、時刻 t の間に動いた距離 s は、図の面積 S になる。

$$s = \frac{1}{2}t \times (2t) = t^2$$

よって、 $t = 0$ のとき原点 O にいるとすれば、座標 x になる。

$$\text{座標} \cdots x = t^2$$

一般に、座標を t で微分すれば速度になる。さらに、速度を微分すれば加速度になる。

$$\text{加速度} \cdots v' = 2$$

この場合、等加速度運動となる。

2 ニュートンの運動方程式

2.1 座標

質点 P は直線上を動いているとする。この点 P の座標を x とする。そして、この x は時刻 t によって定まると考え、次のように表す。

$$x = f(t)$$

さて、文字を節約して次のように表わすことにする。

$$x = x(t)$$

こうしても、 $x = t^2$ のように、 x は t の関数であることを意識すれば混乱は起きない。

2.2 速度・加速度

点 P の座標 x を t で微分すれば速度、さらに微分すれば加速度が得られる。

$$\begin{aligned} \text{座標} \cdots x &= x(t) \\ \text{速度} \cdots \frac{dx}{dt} &= \dot{x} \\ \text{加速度} \cdots \frac{d^2x}{dt^2} &= \ddot{x} \end{aligned}$$

さて、時刻 t で微分したときは $\dot{x}$ のように表す。

2.3 ポテンシャル関数

質量 m の質点 P が、高さ x にあるときの位置エネルギー V は、次のようになる。

$$V = -mgx$$

この V は点の座標 x によって定まる。一般に、座標 x によって定まる関数 V をポテンシャル関数という。

$V = V(x)$

2.4 ニュートンの運動方程式

ニュートンの運動方程式は、

$\text{質量} \times \text{加速度} = \text{力}$

である。さて、特に、力 f がポテンシャル関数 $V(x)$ によって、次のようになっているとする。

$$f = -\frac{dV}{dx}$$

このとき、ニュートンの運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}$$

今後、**ニュートンの運動方程式**といえはこの式のこととする。

2.5 運動エネルギー

質点の運動エネルギー T は、次の式で与えられる。

$$\text{運動エネルギー} = \frac{1}{2} \times \text{質量} \times (\text{速さ})^2$$

これは、次のように表される。

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2$$

このとき、質点の全エネルギー E は、次の式で与えられる。

$$\text{全エネルギー} = \text{運動エネルギー} + \text{ポテンシャル}$$

よって、次のようになる。

$$E = T + V$$

(例) 全エネルギーは保存される。それは、時刻 t が変化しても一定の値をとるということである。これは t で微分すれば示すことができる。

$$\dot{E} = \dot{T} + \dot{V} = \frac{1}{2}m \times 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\dot{x} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\dot{x} = \left(m\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\right)\dot{x} = 0$$

よって、全エネルギーが保存されることが示せた。

2.6 ラグランジュの方程式

次の L を**ラグランジアン**という。

$$L = T - V$$

このラグランジアンから、思い切った計算により、ニュートンの運動方程式と同値な方程式が導かれる。ここではそれを見ていく。では、ラグランジアンは次のようになる。

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - V(x)$$

この式で、 $\dot{x}$ の代わりに v を用いれば、 $L = \frac{1}{2}m(v)^2 - V(x)$ となる。この L には v と x が含まれる。この2つの変数を、思い切って独立変数と考える。これは変ではあるけれど、そう考えることにするのである。即ち、次のように考える。

$$L = L(x, \dot{x})$$

そして、 L を x と $\dot{x}$ で微分する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{dV}{dx} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x}\end{aligned}$$

よって、ニュートンの運動方程式から次の式が導かれる。

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0}$$

この式を、**ラグランジュの方程式**という。これは、ニュートンの運動方程式と同値である。そして、この式を利用して座標変換の計算をしようというのである。

さて、次のような表し方がある。

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \right) L = \frac{\partial}{\partial(x, \dot{x})} L = \frac{\partial L}{\partial(x, \dot{x})}$$

これを使えば、

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{dV}{dx} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \end{cases}$$

は、次のように表せる。

$$\frac{\partial L}{\partial(x, \dot{x})} = \left(-\frac{dV}{dx}, m\dot{x} \right)$$

3 座標変換

3.1 ニュートンの運動方程式

ニュートンの運動方程式で、座標変換を考える。

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0$$

例として、 $x = y^2$ とする。ただし、 $y = y(t)$ とする。では $\frac{dV}{dx}$ を求める。これは $\frac{dV}{dy}$ から求められる。

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dy} &= \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dy} = 2y \frac{dV}{dx} \\ \therefore \frac{dV}{dx} &= \frac{1}{2y} \frac{dV}{dy}\end{aligned}$$

これをニュートンの運動方程式へ代入する。

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + \frac{1}{2y} \frac{dV}{dy} &= 0 \\ 2m\dot{x}\dot{y} + \frac{dV}{dy} &= 0\end{aligned}$$

あとは、 $\ddot{x}$ を計算して代入すればよい。

3.2 ラグランジュの方程式

ラグランジュの方程式にも座標変換を考える。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

これも、 $x = y^2$ とする。では、 t で微分する。

$$\dot{x} = 2y\dot{y}$$

ここで、 y と $\dot{y}$ を独立変数と考える。即ち、 $\dot{x} = \dot{x}(y, \dot{y})$ のように考えて次の計算をする。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial (y, \dot{y})} = (2\dot{y}, 2y)$$

では、ラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ を計算する。ただし、 $L = L(y, \dot{y})$ と考える。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} - \frac{dV}{dy} = 2m\dot{x}\dot{y} - \frac{dV}{dy} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} = 2m\dot{x}y \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= 2m\ddot{x}y + 2m\dot{x}\dot{y}\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 2m\ddot{x}y + \frac{dV}{dy}$$

となる。さて、前§のニュートンの運動方程式によれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

となる。これより、ニュートンの運動方程式と違い、座標変換しても形を変えないことがわかる。

3.3 ラグランジュの方程式 (2)

ラグランジュの方程式では、座標変換 $x = y^2$ をしても形は変わらないことがわかった。さて、前§ではニュートンの運動方程式を利用した。ここでは、ニュートンの運動方程式を利用しないで、次のことを示す。

$L = L(x, \dot{x})$ において、次が成り立っているとする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

座標変換 $x = y^2$ をした $L = L(y, \dot{y})$ において、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

では、これを示す。まず、 $x = y^2$ を t で微分する。

$$\dot{x} = 2y\dot{y}$$

この式において、 y と $\dot{y}$ を独立変数、即ち $\dot{x} = \dot{x}(y, \dot{y})$ のように考える。そして、 $y, \dot{y}$ で微分する。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial (y, \dot{y})} = (2\dot{y}, 2y)$$

ここで、ラグランジアンを、 $L = L(y, \dot{y})$ と考え、次の計算をする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 2y \frac{\partial L}{\partial x} + 2\dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} = 2y \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= 2\dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + 2y \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 2y \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

よって、いえた。

3.4 ラグランジュの方程式 (3)

ここでは、座標変換を $x = x(y)$ と一般化して、次のことを示す。ただし、 $y = y(t)$ とする。

$L = L(x, \dot{x})$ において、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

が成り立っているとする。このとき、 $x = x(y)$ とおいた $L = L(y, \dot{y})$ においても、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

が成り立つ。

$x = x(y)$ を t で微分する。

$$\dot{x} = \frac{dx}{dy} \dot{y}$$

ここで、 $\dot{x} = \dot{x}(y, \dot{y})$ と考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} &= \frac{d^2 x}{dy^2} \dot{y} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} &= \frac{dx}{dy} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{d^2 x}{dy^2} \dot{y} \end{aligned}$$

よって、次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} = 0$$

ここから、 $L = L(y, \dot{y})$ について考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} \right) \end{aligned}$$

よって、 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} = \frac{dx}{dy}$ に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \frac{dx}{dy} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \right) = 0$$

よって、いえた。

3.5 ラグランジュの方程式の利用

ニュートンの運動方程式の座標変換は、次のように計算できることがわかった。座標変換は、 $x = y^2$ とする。まず、ラグランジアンを計算する。

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V$$

$x = y^2$ より、 $\dot{x} = 2y\dot{y}$ 。よって、ラグランジアンは次のようになる。

$$L = \frac{1}{2}(2y\dot{y})^2 - V = 2my^2\dot{y}^2 - V$$

そして、次の計算をする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} &= 4my\dot{y}^2 - \frac{dV}{dy} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= 4my^2\dot{y} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= 8my\dot{y}^2 + 4my^2\ddot{y}\end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ だから、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}4my\dot{y}^2 + 4my^2\ddot{y} + \frac{dV}{dy} &= 0 \\ \therefore 4my(\dot{y}^2 + y\ddot{y}) + \frac{dV}{dy} &= 0\end{aligned}$$

3.6 ラグランジュの方程式の利用 (2)

ここでは、前§を整理する。ラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$ を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} - \frac{dV}{dy} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= m\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} + m\dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} \right)\end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ だから、 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}$ に注意すれば次が得られる。

$$\boxed{m\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} + \frac{dV}{dy} = 0}$$

これを利用して計算してみる。

(例) 座標変換 $x = y^2$ で計算する。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y\dot{y} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} &= 2y\end{aligned}$$

$m\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}} + \frac{dV}{dy} = 0$ へ代入する。

$$2m\ddot{x}y + \frac{dV}{dy} = 0$$

あとは、 $\ddot{x}$ を計算して代入すればよい。

4 座標変換 2

ここでは、 $x = y_1^2 + y_2^3$ という座標変換を考える。ただし、 $y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t)$ とする。

4.1 ニュートンの運動方程式

ニュートンの運動方程式は、次の式である。

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0$$

$x = y_1^2 + y_2^3$ という座標変換をする。では、 $\frac{dV}{dx}$ を求める。ただし、 $V(x) = V(y_1, y_2)$ であることに注意する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y_1} &= \frac{dV}{dx} \frac{\partial x}{\partial y_1} = 2y_1 \frac{dV}{dx} \\ \frac{\partial V}{\partial y_2} &= \frac{dV}{dx} \frac{\partial x}{\partial y_2} = 3y_2^2 \frac{dV}{dx}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= \frac{1}{2y_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ \frac{dV}{dx} &= \frac{1}{3y_2^2} \frac{\partial V}{\partial y_2}\end{aligned}$$

これを、ニュートンの運動方程式へ代入すれば、次の2つの式となる。

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \frac{1}{2y_1} \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0 \\ m\ddot{x} + \frac{1}{3y_2^2} \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

ゆえに、

$$\begin{cases} 2my_1\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0 \\ 3my_2^2\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

あとは、 $\ddot{x}$ を計算して代入すればよい。

4.2 ラグランジュの方程式

ラグランジュの方程式にも座標変換を考える。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

これも、 $x = y_1^2 + y_2^3$ とする。まず、 t で微分する。

$$\dot{x} = 2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2$$

この式で、 $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$ を4つの独立変数と考える。即ち、 $\dot{x} = \dot{x}(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$ と考える。では、まず変数 $y_1, \dot{y}_1$ に注目して計算をする。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial (y_1, \dot{y}_1)} = (2\dot{y}_1, 2y_1)$$

では、ラグランジュの方程式 $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ を計算する。これも、 $L = L(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$ と考える。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y_1} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial y_1} = 2m\dot{x}\dot{y}_1 - \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} = 2m\dot{x}y_1 \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= 2m\ddot{x}y_1 + 2m\dot{x}\dot{y}_1\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 2m\ddot{x}y_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1}$$

よって、前§のニュートンの運動方程式より、次がいえる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$$

次は、変数 $y_2, \dot{y}_2$ について計算をする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}}{\partial (y_2, \dot{y}_2)} &= (6y_2\dot{y}_2, 3\dot{y}_2^2) \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} - \frac{\partial V}{\partial y_2} = 6m\dot{x}y_2\dot{y}_2 - \frac{\partial V}{\partial y_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} = 3m\dot{x}y_2^2 \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) &= 3m\ddot{x}y_2^2 + 6m\dot{x}y_2\dot{y}_2\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = 3m\ddot{x}y_2^2 + \frac{\partial V}{\partial y_2}$$

よって、前§のニュートンの運動方程式より、次がいえる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = 0$$

ラグランジュの方程式では、座標変換しても形を変えないことがわかる。

4.3 記法

前§で得られた結果は次の2式である。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

さて、これは $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ とおけば次のように表せる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} \right) &= (0, 0) \\ \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}, \frac{\partial L}{\partial y_2} \right) &= (0, 0) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}, \frac{\partial L}{\partial y_2} \right) &= (0, 0) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial (\dot{y}_1, \dot{y}_2)} \right) - \frac{\partial L}{\partial (y_1, y_2)} &= (0, 0) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

4.4 ラグランジュの方程式 (2)

$L = L(x, \dot{x})$ において、次が成り立っているとする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

座標変換 $x = y_1^2 + y_2^3$ をする。このとき、 $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ においても、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

ただし、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ とする。ここでは、これを示す。まず、 $x = y_1^2 + y_2^3$ から、次を導く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} &= (2y_1, 3y_2^2) \\ \dot{x} &= 2y_1 \dot{y}_1 + 3y_2^2 \dot{y}_2 \end{aligned}$$

この $\dot{x}$ について、 $y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2$ を独立変数と思う。では、まず変数 $y_1, \dot{y}_1$ に注目する。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial (y_1, \dot{y}_1)} = (2\dot{y}_1, 2y_1)$$

$L = L(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$ を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_1} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} = 2y_1 \frac{\partial L}{\partial x} + 2\dot{y}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} = 2y_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= 2\dot{y}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + 2y_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 2y_1 \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

次は変数 $y_2, \dot{y}_2$ について計算する。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial (y_2, \dot{y}_2)} = (6y_2 \dot{y}_2, 3\dot{y}_2^2)$$

$L = L(y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)$ を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y_2} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} = 3y_2^2 \frac{\partial L}{\partial x} + 6y_2 \dot{y}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} = 3y_2^2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) &= 6y_2 \dot{y}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + 3y_2^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = 3y_2^2 \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0$$

4.5 ラグランジュの方程式 (3)

$L = L(x, \dot{x})$ において、次が成り立っているとする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

座標変換 $x = x(\mathbf{y})$ をする。このとき、 $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ においても、次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

ただし、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ とする。ここでは、これを示す。まず、 $x = x(\mathbf{y})$ を t で微分する。

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial x}{\partial y_2} \dot{y}_2$$

ここで、 $\dot{x} = \dot{x}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ と考える。まず、変数 $y_1, \dot{y}_1$ に注目する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} &= \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \dot{y}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_2 \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} &= \frac{\partial x}{\partial y_1} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \dot{y}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_2\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} = 0$$

ここで、 $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial y_1} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right)\end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} = \frac{\partial x}{\partial y_1}$ に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} \right) = 0$$

次に、変数 $y_2, \dot{y}_2$ に注目する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} \dot{y}_2 \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} &= \frac{\partial x}{\partial y_2} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} \dot{y}_2 \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} = 0$$

ここで、 $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_2} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) \end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} = \frac{\partial x}{\partial y_2}$ に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial y_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} \right) = 0$$

4.6 記法 (2)

前 § の証明を見ると、同じことを 2 回繰り返している。これを何とかしてみる。では、 $x = x(\mathbf{y})$ において、 t で微分する所は、内積を使えば次のようになる。

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial x}{\partial y_2} \dot{y}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2} \right) \cdot (\dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$

次は、 $\dot{x} = \dot{x}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ と考えて、偏微分する所である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} &= \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} \right) = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \dot{y}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_2, \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} \dot{y}_2 \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \dot{y}_1, \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_1 \right) + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_2, \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} \dot{y}_2 \right) = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \dot{y}_1 + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2}, \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2} \right) \dot{y}_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2} \right) \dot{y}_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2} \right) \dot{y}_2 = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) \dot{y}_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) \dot{y}_2 \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right), \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) \right) \cdot (\dot{y}_1, \dot{y}_2) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial^2 x}{\partial \mathbf{y}^2} \cdot \dot{\mathbf{y}} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} &= \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2} \right) = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \end{aligned}$$

次は、 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}$ を t で微分する所である。ここは、上の結果を利用してみる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial^2 x}{\partial \mathbf{y}^2} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

これは、前 § の結果と一致する。次は、 $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ の計算の所である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}, \frac{\partial L}{\partial y_2} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1}, \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_2} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} \right) \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \\ \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right), \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) \end{aligned}$$

以上の結果より、次のような記述となる。

ラグランジュの方程式における、変数変換に関する証明

$L = L(x, \dot{x})$ において、次が成り立っているとする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

座標変換 $x = x(\mathbf{y})$ をする。このとき、 $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ においても、次の式が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

これを示す。まず、 $x = x(\mathbf{y})$ を t で微分する。

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$

ここで、 $\dot{x} = \dot{x}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ と考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial^2 x}{\partial \mathbf{y}^2} \cdot \dot{\mathbf{y}} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} &= \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial^2 x}{\partial \mathbf{y}^2} \cdot \dot{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

ここで、 $L = L(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})$ を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) \end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}}$ に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} \right) = \mathbf{0}$$

よって、いえた。

4.7 ラグランジュの方程式の利用

ニュートンの運動方程式の座標変換は、次のように計算できることがわかった。

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0$$

座標変換は、 $x = y_1^2 + y_2^3$ とする。まず、ラグランジアン $L = T - V$ を計算する。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$$

$x = y_1^2 + y_2^3$ より、 $\dot{x} = 2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2$ 。よって、ラグランジアンは次のようになる。

$$L = \frac{1}{2}m(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2)^2 - V$$

この式を使って、次の式を計算する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_1} &= m(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) \times 2\dot{y}_1 - \frac{\partial V}{\partial y_1} = 2m\dot{y}_1(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) - \frac{\partial V}{\partial y_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= m(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) \times 2y_1 = 2my_1(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= 2m\dot{y}_1(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) + 2my_1(2\dot{y}_1^2 + 2y_1\ddot{y}_1 + 6y_2\dot{y}_2^2 + 3y_2^2\ddot{y}_2) \end{aligned}$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$ だから、

$$2m\dot{y}_1(2\dot{y}_1^2 + 2y_1\ddot{y}_1 + 6y_2\dot{y}_2^2 + 3y_2^2\ddot{y}_2) + \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y_2} &= m(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) \times 6y_2\dot{y}_2^2 - \frac{\partial V}{\partial y_2} = 6my_2\dot{y}_2^2(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) - \frac{\partial V}{\partial y_2} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} &= m(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) \times 3y_2^2 = 3my_2^2(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) \\
\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) &= 6my_2\dot{y}_2(2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2) + 3my_2^2(2\dot{y}_1^2 + 2y_1\ddot{y}_1 + 6y_2\dot{y}_2^2 + 3y_2^2\ddot{y}_2) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} &= 0 \text{ だから、}
\end{aligned}$$

$$3my_2^2(2\dot{y}_1^2 + 2y_1\ddot{y}_1 + 6y_2\dot{y}_2^2 + 3y_2^2\ddot{y}_2) + \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0$$

よって、座標変換されたニュートンの運動方程式が得られた。

$$\begin{cases} 2my_1(2\dot{y}_1^2 + 2y_1\ddot{y}_1 + 6y_2\dot{y}_2^2 + 3y_2^2\ddot{y}_2) + \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0 \\ 3my_2^2(2\dot{y}_1^2 + 2y_1\ddot{y}_1 + 6y_2\dot{y}_2^2 + 3y_2^2\ddot{y}_2) + \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

4.8 ラグランジュの方程式の利用 (2)

ここでは、前§を整理する。ラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$ を計算する。まず、 $y_1, \dot{y}_1$ に注目する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y_1} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial y_1} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \\
\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= m\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} + m\dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} &= 0 \text{ だから、} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} \text{ に注意すれば次が得られる。}
\end{aligned}$$

$$m\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0$$

次に、 $y_2, \dot{y}_2$ に注目する。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial y_2} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} - \frac{\partial V}{\partial y_2} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} &= m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \\
\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) &= m\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} + m\dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} &= 0 \text{ だから、} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2} \text{ に注意すれば次が得られる。}
\end{aligned}$$

$$m\ddot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} + \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0$$

これを利用して計算してみる。

(例)

座標変換は、 $x = y_1^2 + y_2^3$ とする。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y_1\dot{y}_1 + 3y_2^2\dot{y}_2 \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} &= 2y_1 \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2} &= 3y_2^2\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}y_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0 \\ 3m\ddot{x}y_2^2 + \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

あとは、 $\ddot{x}$ を計算して代入すればよい。

4.9 記法 (3)

前 § は、次のように表せる。ラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$ を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= m\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} &= m\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \\ \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right) &= m\ddot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} + m\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right)\end{aligned}$$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = 0$ だから、 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}}$ に注意すれば次が得られる。

$$m\ddot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

4.10 例

ニュートンの運動方程式は次の式である。

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0$$

前 § の結果を利用する。

例 1 $x = r \cos \theta$ と座標変換とする。ただし、 $r = r(t), \theta = \theta(t)$ とする。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial(\dot{r}, \dot{\theta})} &= (\cos \theta, -r \sin \theta) \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta\end{aligned}$$

よって、座標変換後のニュートンの運動方程式が得られた。

$$\begin{cases} m(\ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta) \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \\ -mr(\ddot{r} \cos \theta - 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \theta - r\ddot{\theta} \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \cos \theta) \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

例 2 $x = r \sin \theta$ と座標変換とする。ただし、 $r = r(t), \theta = \theta(t)$ とする。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial(\dot{r}, \dot{\theta})} &= (\sin \theta, r \cos \theta) \\ \ddot{x} &= \ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{aligned}$$

よって、座標変換後のニュートンの運動方程式が得られた。

$$\begin{cases} m(\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta) \sin \theta + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \\ mr(\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta + r\ddot{\theta} \cos \theta - r\dot{\theta}^2 \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

5 座標変換 3

ラグランジュの方程式は、座標変換 $x = x(y_1, y_2, y_3)$ をしても形は変わらない。すなわち次がいええる。

ラグランジアン $L = L(x, \dot{x})$ において次が成り立っているとする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

これに、座標変換 $x = x(y_1, y_2, y_3)$ すれば、次が成り立つ。

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_2} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_3} = 0 \end{cases}$$

今回は、証明自体を考えることにする。

5.1 ラグランジュの方程式

座標変換 $x = x(y_1, y_2, y_3)$ を t で微分する。

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial x}{\partial y_2} \dot{y}_2 + \frac{\partial x}{\partial y_3} \dot{y}_3$$

このとき、変数 $y_1, y_2, y_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3$ は独立変数と考える。即ち、 $\dot{x} = \dot{x}(y_1, y_2, y_3, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3)$ と考える。

では、変数 $y_1, \dot{y}_1$ に注目する。最初に、 $\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} = \frac{\partial x}{\partial y_1} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} = 0 \end{cases}$ を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial x}{\partial y_2} \dot{y}_2 + \frac{\partial x}{\partial y_3} \dot{y}_3 \right) \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} &= \frac{\partial x}{\partial y_1} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) &= \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \dot{y}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \dot{y}_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_3} \dot{y}_3 = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial x}{\partial y_2} \dot{y}_2 + \frac{\partial x}{\partial y_3} \dot{y}_3 \right) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} = 0$$

次に $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$ を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y_1} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} = \frac{\partial x}{\partial y_1}$ に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1} \right) = 0$$

ゆえに、示せた。後は、同様にして残り 2 つを示すことができる。

5.2 ラグランジュの方程式 (2)

今度は、次のようにして証明する。

ラグランジアン $L = L(x, \dot{x})$ において次が成り立っているとする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

これに、座標変換 $x = x(y_1, y_2, y_3)$ すれば、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

座標変換 $x = x(y_1, y_2, y_3)$ を t で微分する。

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x}{\partial y_k} \dot{y}_k$$

では、変数 $y_i, \dot{y}_i$ に注目する。最初に、 $\begin{cases} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial x}{\partial y_i} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_i} = 0 \end{cases}$ を示す。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x}{\partial y_k} \dot{y}_k = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_k} \dot{y}_k$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial x}{\partial y_i}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 x}{\partial y_i \partial y_k} \dot{y}_k$$

ゆえに、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_i} = 0$$

次に $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0$ を示す。

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} \right)$$

ここで、 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial x}{\partial y_i}$ に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial y_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_i} \right) = 0$$

ゆえに、示せた。

5.3 ラグランジュの方程式 (3)

ここでは、ベクトルを使ってみる。

まず、

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

とおけば、座標変換 $x = x(y_1, y_2, y_3)$ は、

$$x = x(\mathbf{y})$$

と表せる。ラグランジュの方程式で成り立つ事柄は、次のようになる。

$$\begin{aligned} (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3) &= \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dy_3}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (y_1, y_2, y_3) = \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \dot{\mathbf{y}} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial y_1}, \frac{\partial L}{\partial y_2}, \frac{\partial L}{\partial y_3} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right) L = \frac{\partial}{\partial (y_1, y_2, y_3)} L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} \\ \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) \end{aligned}$$

よって、ラグランジュの方程式で成り立つ事柄は次のように表せる。

ラグランジアン $L = L(x, \dot{x})$ において、次の式が成り立っているとする。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

これに、座標変換 $x = x(\mathbf{y})$ をすれば、次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

次は、 $x = x(\mathbf{y})$ を t で微分する所である。ここでは内積を使う。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dt} = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2}, \frac{\partial x}{\partial y_3} \right) \cdot \left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dy_3}{dt} \right) = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{dt}$$

よって、次のようになる。

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$

次は、 $\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial y_1}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_2}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial y_3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \dot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}}$ より、次のようになる。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial^2 \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$

次は、 $\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_1}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_2}, \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{y}_3}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2}, \frac{\partial x}{\partial y_3}\right)$ より、次のようになる。

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}}$$

これより、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} \right) \cdot \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial^2 x}{\partial^2 \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}$$

ゆえに、次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mathbf{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \\ \therefore \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \cdot \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) \end{aligned}$$

ゆえに、 $\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{y}}$ に注意すれば、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

がいえる。