

線形性 IV

【線形微分方程式】

概要

線形微分方程式の解法を見ていく。

目次

1	線形微分方程式	2
2	不定積分	2
2.1	$y' = f(x)$	2
2.2	形式的な解法	3
2.3	$y' = 0$	3
3	1 階線形微分方程式	5
3.1	$y' + ay = 0$	5
3.2	$y' + ay = Q(x)$	7
4	2 階線形微分方程式	10
4.1	$y'' + ay' + by = 0$	10
4.2	$y'' + ay' + by = Q(x)$	13

1 線形微分方程式

y, y', y'' を含む微分方程式を解いていく。ただし、次のような型を扱う。

- (1) 不定積分 $y' = f(x)$
- (2) 1 階線形微分方程式 $y' + ay = Q(x)$
- (3) 2 階線形微分方程式 $y'' + ay' + by = Q(x)$
- (4) 1 階連立線形微分方程式 $\begin{cases} y'_1 = ay_1 + by_2 + f_1(x) \\ y'_2 = cy_1 + dy_2 + f_2(x) \end{cases}$

これらには、線形性 という共通の性質がある。線形性に注目すれば、次のように表せる。

- (1) 不定積分 $Dy = f(x)$
- (2) 1 階線形微分方程式 $(D + a)y = Q(x)$
- (3) 2 階線形微分方程式 $(D^2 + aD + b)y = Q(x)$
- (4) 1 階連立線形微分方程式 $\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$

また、次のように、 $Q(x)$ が 0 のものを同次線形微分方程式という。

- (1) 不定積分 $y' = 0$
- (2) 1 階線形微分方程式 $y' + ay = 0$
- (3) 2 階線形微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$
- (4) 1 階連立線形微分方程式 $\begin{cases} y'_1 = ay_1 + by_2 \\ y'_2 = cy_1 + dy_2 \end{cases}$

2 不定積分

2.1 $y' = f(x)$

まず、次のような積分から見ていく。

$$y' = 2x$$

この y は、微分して $2x$ になるものである。そのような y は無数ある。

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x^2 + 1 \\ y = x^2 + 2 \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow y' = 2x$$

違いは定数だけなので、 $y = x^2 + C$ (積分定数) のように表わす。これを不定積分といい、次のように表わす。

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

よって、次のようになる。

$$y' = 2x \text{ のとき、} y = \int 2x dx = x^2 + C$$

一般に、次のようになる。

$$y' = f(x) \text{ のとき、} y = \int f(x) dx$$

2.2 形式的な解法

後のために、形式的な解法を見ていく。このために、 y' を $\frac{dy}{dx}$ で表わす。

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ のとき、} y = \int f(x) dx$$

これは、次のように表わせる。

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ のとき、} \int dy = \int f(x) dx$$

よって、次のように解く。

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ を変形して、} dy = f(x) dx \\ &\text{そして、積分記号を付けて、} \\ &\int dy = \int f(x) dx \text{ を解く。} \end{aligned}$$

例 1. $y' = 2x$ を解く。

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = 2x \text{ を式変形する。} dy = 2x dx \\ &\int dy = \int 2x dx \\ &\text{ゆえに、} \\ &y = x^2 + C \end{aligned}$$

2.3 $y' = 0$

特に、次の不定積分を見る。

$$y' = 0$$

この y は、微分して 0 になるものである。そのような y は無数ある。

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 \\ y = 2 \\ y = 3 \\ \dots \end{array} \right\} \rightarrow y' = 0$$

よって、

$$y = C(\text{積分定数})$$

これより、積分定数 C は、 $y' = 0$ の解になっていることがわかる。

3 1 階線形微分方程式

$y' + ay = Q(x)$ を満たす y を求める。これを、1 階線形微分方程式 という。

3.1 $y' + ay = 0$

$y' + ay = 0$ の型から解いていく。例として、

$$y' + 3y = 0$$

を解く。ただ、色々な解き方を見ていく。その理由は、形式的な解き方をしたいからである。

3.1.1 解法 1 (変数分離法)

$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ と表す。 $\frac{dy}{dx} = -3y$ となるから、 $\frac{1}{y}dy = -3dx$ と変形できる。よって、次の式を解けばよい。

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (-3) dx$$

ゆえに、

$$\log |y| = -3x + C'$$

$$|y| = e^{-3x+C'}$$

$$y = \pm e^{-3x+C'} = \pm C' e^{-3x}$$

$$\text{ゆえに、} y = C e^{-3x}$$

この解き方を、変数分離法 という。

3.1.2 解法 2

さて、別の解き方を見ていく。それは、次の微分に注意する。

$$(e^{3x}y)' = 3e^{3x}y + e^{3x}y' = e^{3x}(y' + 3y)$$

よって、 $y' + 3y = 0$ の両辺に e^{3x} をかけるのである。

$$e^{3x}(y' + 3y) = 0$$

$$(e^{3x}y)' = 0$$

$$e^{3x}y = C$$

$$y = C e^{-3x}$$

よって解けた。

3.1.3 解法 3

$y' + 3y = 0$ の解は、 $y = Ce^{-3x}$ である。 C を除いた、 e^{-3x} を基本解という。この基本解を求める方法を見ていく。まず、

$$y = e^{\lambda x}$$

とおく。微分すると $y' = \lambda e^{\lambda x}$ となる。これを微分方程式へ代入する。

$$\lambda e^{\lambda x} + 3e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = -3$$

よって、基本解 $y = e^{-3x}$ が得られる。これに C を付ければ、解 $y = Ce^{-3x}$ が得られる。一般には次のようになる。

$$y' + ay = 0$$

まず、基本解を求める。

$y = e^{\lambda x}$ とおき、微分方程式へ代入する。

$$\lambda e^{\lambda x} + ae^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda + a = 0$$

$$\lambda = -a$$

よって、基本解は $y = e^{-ax}$

よって、 $y = Ce^{-ax}$

3.1.4 解法 4

$$y' + 3y = 0$$

今度は、線形性に注目する。まず、この微分方程式を次のように表わす。

$$\frac{d}{dx}y + 3y = 0$$

$D = \frac{d}{dx}$ とおけば次のようになる。

$$Dy + 3y = 0$$

$$(D + 3)y = 0$$

これより、 D を λ と置き換えて、

$$\lambda + 3 = 0$$

を解くのである。後は、解法 3 と同じである。

$$\lambda = -3$$

よって、 $y = Ce^{-3x}$ が得られる。一般に、

$$\begin{aligned}
 y' + ay &= 0 \\
 Dy + ay &= 0 \\
 (D + a)y &= 0 \\
 D &= \lambda \text{とおく。} \\
 \lambda + a &= 0 \\
 \lambda &= -a \\
 \text{よって、} y &= Ce^{-ax}
 \end{aligned}$$

3.2 $y' + ay = Q(x)$

y', y の入った微分方程式

$$y' + ay = Q(x)$$

の形のものを見る。これも、色々な解き方を見ていく。例として、

$$y' + 3y = 6$$

を解く。

3.2.1 解法 1

これを解くには次の微分に注意する。

$$(e^{3x}y)' = 3e^{3x}y + e^{3x}y' = e^{3x}(y' + 3y)$$

ゆえに、両辺に e^{3x} をかけるのである。

$$e^{3x}(y' + 3y) = 6e^{3x}$$

$$(e^{3x}y)' = 6e^{3x}$$

$$e^{3x}y = 2e^{3x} + C$$

ゆえに、

$$y = 2 + Ce^{-3x}$$

一般には $y' + ay = Q(x)$ は次のように解ける。

$$e^{ax}(y' + ay) = e^{ax}Q(x)$$

$$(e^{ax}y)' = e^{ax}Q(x)$$

$$e^{ax}y = \int e^{ax}Q(x)dx + C$$

ゆえに、

$$y = e^{-ax} \int e^{ax}Q(x)dx + Ce^{-ax}$$

さて、これで解けたのであるが、 C を含む項は

$$y' + ay = 0$$

の解になっていることに注意して、 C を含む項と、含まない項を別々に求めるといふ、別の解法を見ていく。

3.2.2 解法 2 (定数変化法)

まず、

$$y' + 3y = 0$$

を解く。この解は、

$$y = Ce^{-3x}$$

である。この積分定数 C を x の式 $u(x)$ へと変化させる。それを、元の微分方程式の解と思うのである。

$$y = ue^{-3x} \text{ とおく。}$$

$$y' = u'e^{-3x} - 3ue^{-3x} = u'e^{-3x} - 3y$$

$$\text{ゆえに、} y' + 3y = u'e^{-3x}$$

$$\text{よって、} u'e^{-3x} = 6$$

$$u' = 6e^{3x}$$

$$u = 2e^{3x} + C$$

$$\text{ゆえに、} y = (-2e^{3x} + C)e^{-3x} = 2 + Ce^{-3x}$$

これで解が得られていることがわかる。一般の場合を試みる。

$y' + ay = Q(x)$ の解法

(1) まず、 $y' + ay = 0$ を解いて、 $y = Ce^{-ax}$

(2) C を $u(x)$ へ変える。

$$y = ue^{-ax}$$

$$y' = u'e^{-ax} - aue^{-ax} = u'e^{-ax} - ay$$

$$\text{ゆえに、} y' + ay = u'e^{-ax}$$

よって、

$$u'e^{-ax} = Q(x)$$

$$u' = e^{ax}Q(x)$$

$$u = \int e^{ax}Q(x)dx + C$$

ゆえに、

$$y = e^{-ax} \int e^{ax}Q(x)dx + Ce^{-ax}$$

これは、解法 1 と同じ解になっていることがわかる。この解法を 定数変化法 という。また、慣れてくれば早く解けるようになる。

例 $y' + 3y = 6$

解

(1) $y' + 3y = 0$ とする。

$(D+3)y = 0$ より

$$\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = -3$$

ゆえに、 $y = Ce^{-3x}$

(2) $y = ue^{-3x}$ として、

$$u'e^{-3x} = 6$$

$$u' = 6e^{3x}$$

$$u = 2e^{3x} + C$$

ゆえに、

$$y = (2e^{3x} + C)e^{-3x} = 2 + Ce^{-3x}$$

4 2 階線形微分方程式

2 階線形微分方程式

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

の解き方を見ていく。

4.1 $y'' + ay' + by = 0$

まずは、

$$y'' + ay' + by = 0$$

を解く。これには、3 つの例を解く必要がある。

4.1.1 例 1

1 つ目の例は、

$$y'' + y' - 6y = 0$$

である。これは、

$$\frac{d^2}{dx^2}y + \frac{d}{dx}y - 6y = 0$$

となり、 $\frac{d}{dx} = D$ とおけば、

$$D^2y + Dy - 6y = 0$$

となる。よって、

$$(D^2 + D - 6)y = 0$$

$$(D + 3)(D - 2)y = 0$$

となる。ここで、 $v = (D - 2)y$ とおけば、

$$(D + 3)v = 0$$

ゆえに、 $v = C_1 e^{-3x}$ となり、

$$(D - 2)y = C_1 e^{-3x}$$

を解けばよい。まず、 $(D - 2)y = 0$ を解けば、 $y = C e^{2x}$ が得られる。ここで、 C を $u(x)$ へ変化させる。

$$y = u e^{2x}$$

よって、

$$u' e^{2x} = C_1 e^{-3x}$$

が得られる。

$$u' = C_1 e^{-5x}$$

$$u = -\frac{1}{5} C_1 e^{-5x} + C_2$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{5}C_1e^{-5x} + C_2 \right) e^{2x} \\ &= -\frac{1}{5}C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} \end{aligned}$$

積分定数を調整して、

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$$

これで解が得られた。さて、積分定数は2つあり、それを除いた e^{-3x} と e^{2x} を基本解という。

4.1.2 例2

2つ目の例は、

$$y'' - 2y' + y = 0$$

である。これを解く。

$$D^2 - 2Dy + y = 0$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 0$$

$$(D - 1)^2y = 0$$

$v = (D - 1)y$ とおけば、

$$(D - 1)v = 0$$

よって、 $v = C_1e^x$ が得られる。よって、

$$(D - 1)y = C_1e^x$$

を解けばよい。まず、 $(D - 1)y = 0$ を解けば、 $y = Ce^x$ が得られる。ここで、 C を $u(x)$ へ変化させる。

$$y = ue^x$$

より、

$$u'e^x = C_1e^x$$

$$u' = C_1$$

$$u = C_1x + C_2$$

よって、

$$y = (C_1x + C_2)e^x$$

$$y = C_1xe^x + C_2e^x$$

これで解が得られたが、積分定数を除いた xe^x, e^x を基本解という。

4.1.3 例3

3 つ目の例は、

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

である。これを解く。

$$(D^2 - 2D + 5)y = 0$$

これは、

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

を解く。解の公式より、 $\lambda = 1 \pm 2i$ が得られる。よって、

$$(D - (1 + 2i))(D - (1 - 2i))y = 0$$

この後は、例1と同じだから

$$y = C_1 e^{(1+2i)x} + C_2 e^{(1-2i)x}$$

が得られる。さて、この場合の基本解は虚数解となる。そこで、さらに式変形する。

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^x e^{2ix} + C_2 e^x e^{-2ix} \\ &= e^x (C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix}) \\ &= e^x (C_1 (\cos 2x + i \sin 2x) + C_2 (\cos(-2x) + i \sin(-2x))) \\ &= e^x (C_1 (\cos 2x + i \sin 2x) + C_2 (\cos 2x - i \sin 2x)) \\ &= e^x ((C_1 + C_2) \cos 2x + (iC_1 - iC_2) \sin 2x) \end{aligned}$$

ここで、積分定数を調整して、

$$\begin{aligned} y &= e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \\ &= C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \sin 2x \end{aligned}$$

となる。よって、この場合の基本解は、 $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$ の2つとなる。

4.1.4 解法

では、

$$y'' + ay' + by = 0$$

を見ていく。この解は、基本解を y_1, y_2 とおけば、 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ が解となる。この基本解を求める方法をまとめる。それは、

$$\begin{aligned} D^2 y + aDy + by &= 0 \\ (D^2 + aD + b)y &= 0 \end{aligned}$$

よって、

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

を解く。ここから、3つの場合に分かれる。

(1) 異なる2つの実数解

$\lambda = \alpha, \beta$ とおけば、基本解は、 $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ より、解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

(2) 重解

$\lambda = \alpha$ とおけば、基本解は、 $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}$ より、解は

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$$

(3) 異なる 2 つの虚数解

$\lambda = a \pm bi$ とおけば、基本解は、 $e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx$ より、解は

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx$$

4.2 $y'' + ay' + by = Q(x)$

では、 $y'' + ay' + by = Q(x)$ を解く。例は、簡単な、

$$y'' + y' - 6y = 6$$

とする。

4.2.1 解法 1

$$y'' + y' - 6y = 6$$

を解く。これは、

$$D^2 y + D y - 6y = 6$$

$$(D^2 + D - 6)y = 6$$

$$(D + 3)(D - 2)y = 6$$

ここで、 $(D - 2)y = v$ とおけば、 $(D + 3)v = 6$ となる。これは、以前解いたので途中は省略する。

$$v = 2 + C_1 e^{-3x}$$

よって、次は

$$(D - 2)y = 2 + C_1 e^{-3x}$$

を解けばよい。 $(D - 2)y = 0$ を解けば、 $y = C e^{2x}$ が得られる。次に、 C を $u(x)$ へ変化させる。

$$y = u e^{2x}$$

を解けばよい。

$$u' e^{2x} = 2 + C_1 e^{-3x}$$

$$u' = 2e^{-2x} + C_1 e^{-5x}$$

$$u = -e^{-2x} - \frac{1}{5} C_1 e^{-5x} + C_2$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} y &= \left(-e^{-2x} - \frac{1}{5}C_1e^{-5x} + C_2 \right) e^{2x} \\ &= -1 - \frac{1}{5}C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} \end{aligned}$$

積分定数を調整して、

$$y = -1 + C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$$

これで解が得られた。さて、積分定数 C_1, C_2 を含む 2 項は、

$$y'' + y' - 6y = 0$$

の解である。よって、積分定数を含む項はすぐに求めることができる。

4.2.2 解法 2 (定数変化法)

$y'' + y' - 6y = 6$ の別の解き方を見ていく。

まず、

$$y'' + y' - 6y = 0$$

を解く。

$$(D^2 + D - 6)y = 0$$

$$(D + 3)(D - 2)y = 0$$

これから、基本解は e^{-3x}, e^{2x} より、積分定数を含む項、

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$$

が得られる。ここで、 C_1, C_2 を $u_1(x), u_2(x)$ へ変えるのである。これを、定数変化法という。

$$y = u_1e^{-3x} + u_2e^{2x}$$

そして、これを微分方程式の解と思うのである。さて、微分すると

$$y' = u'_1e^{-3x} - 3u_1e^{-3x} + u'_2e^{2x} + 2u_2e^{2x}$$

となる。この時点で、 u'_1, u'_2 を含む部分を 0 とおく。

$$u'_1e^{-3x} + u'_2e^{2x} = 0$$

よって、 y' は

$$y' = -3u_1e^{-3x} + 2u_2e^{2x}$$

となる。

$$y'' = -3u'_1e^{-3x} + 9u_1e^{-3x} + 2u'_2e^{2x} + 4u_2e^{2x}$$

これを $y'' + y' - 6y = 6$ へ代入する。

$$-3u'_1e^{-3x} + 9u_1e^{-3x} + 2u'_2e^{2x} + 4u_2e^{2x} - 3u_1e^{-3x} + 2u_2e^{2x} - 6u_1e^{-3x} - 6u_2e^{2x} = 6$$

式整理する。

$$-3u_1'e^{-3x} + 2u_2'e^{2x} = 6$$

よって、2つの式が出てきた。

$$\begin{cases} u_1'e^{-3x} + u_2'e^{2x} = 0 \\ -3u_1'e^{-3x} + 2u_2'e^{2x} = 6 \end{cases}$$

これから、 u_1', u_2' を求める。ところで、連立方程式を解けばよいが、行列を使ってみる。

$$\begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0' \\ 6 \end{pmatrix}$$

この方が、見通しがよいことに気づくだろう。即ち、基本解ができればこの式を導くことができる。

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3x} & e^{2x} \\ -3e^{-3x} & 2e^{2x} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0' \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -6e^{3x} \\ 6e^{-2x} \end{pmatrix}$$

ゆえに、

$$u_1 = -\frac{2}{5}e^{3x} + C_1, u_2 = -\frac{3}{5}e^{-2x} + C_2,$$

ゆえに、

$$y = u_1e^{-3x} + u_2e^{2x} = \left(-\frac{2}{5}e^{3x} + C_1\right)e^{-3x} + \left(-\frac{3}{5}e^{-2x} + C_2\right)e^{2x} = -1 + C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}$$

と解が得られた。

ここで、定数変化法をまとめる。

$$y'' + ay' + by = Q(x)$$

まず、 $y'' + ay' + by = 0$ を解く

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ を解く。3つの場合があるが、基本解を y_1, y_2 とおけば、

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

が得られる。そして、定数を変化させる。

$$y = u_1y_1 + u_2y_2$$

これより、

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = Q(x) \end{cases}$$

または、行列を用いれば、

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Q(x) \end{pmatrix}$$

これから、 u_1', u_2' を求めれば、 u_1, u_2 が得られる。

そして、 $y = u_1y_1 + u_2y_2$ へ代入すれば解が得られる。