

線形性 I

概要

これから線形性の魅力を記述しようと思う。しかし、それは大変なことに思える。その理由は、その性質が単純だからである。線形性の性質は短く記述できるのである。だから、線形性の魅力は、何かの背後に潜んでいるのである。しかし、その魅力に触れたとき、感嘆するはずである。その記述をしたいと思う。さて、この「線形性 1」では、線形性を満たす例を挙げていく。

目次

1	ベクトル	3
1.1	列ベクトル	3
1.2	行ベクトル	4
1.3	ベクトル	4
1.4	連立 1 次方程式	4
2	線形性	6
2.1	線形性	6
2.2	1 次形式	6
2.3	微分・積分	9
2.4	線形微分	10
3	複線形性	13
3.1	複線形性	13
3.2	$f(x, y) = axy$	13
3.3	$f(x, y, z) = axyz$	13
3.4	$ad - bc$	13
4	交代性	15
4.1	交代性	15
4.2	$x - y$	15
4.3	$(x - y)(y - z)(z - x)$	15
4.4	$ad - bc$	15
4.5	交代性の性質	15
5	連立 1 次方程式の解を求める仕組み	16

5.1	交代複線形関数	16
5.2	連立 2 元 1 次方程式	16
5.3	連立 2 元 1 次方程式 (2)	17

1 ベクトル

線形性を記述するための準備をする。それは、ベクトルで、記法に関するものである。

1.1 列ベクトル

簡単な足し算、 $2 + 3 = 5$ と $3 + 4 = 7$ を次のように並べる。

$$\begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

これを次のように表わす。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

次は、簡単な引き算、 $2 - 3 = -1$ と $6 - 4 = 2$ を並べる。

$$\begin{cases} 2 - 3 = -1 \\ 6 - 4 = 2 \end{cases}$$

これを次のように表わす。

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

次は、3 と 4 を 2 倍したものを並べる。

$$\begin{cases} 2 \times 3 = 6 \\ 2 \times 4 = 8 \end{cases}$$

これを次のように表わす。

$$2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

このように、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は数のように計算できる。これを、列ベクトルといい、 $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のように表わす。一般に、列ベクトルは次のような 2 つの演算ができる。

(1) 実数倍 $k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ (2) 和 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$
--

また、 x, y を列ベクトルの成分という。

1.2 行ベクトル

座標平面上の点の座標は、 (x, y) のように表わす。さて、その x, y が、 $y = 2x$ を満たしているとならるか見ていく。では、 x を、 $-1, 0, 1, 2$ としてみる。

$$(-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4)$$

x に色々な値を代入すれば、無数の点の座標となる。そして、座標平面上では、直線 $y = 2x$ となる。ところで、これらの間で次のような2つの演算がいつでもできる。

(1) 実数倍	$k(x, y) = (kx, ky)$
(2) 和	$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

例

$$(1) 5(3, 6) = (15, 30)$$

$$(2) (2, 4) + (3, 6) = (5, 10) \square$$

さて、このとき次のようになる。

$$(x, y) = (x, 2x) = x(1, 2)$$

ところで、別に $y = 2x$ を満たさなくても、 (x, y) はこの演算ができる。そして、 $\vec{p} = (x, y)$ のように表わし、行ベクトルという。

1.3 ベクトル

列ベクトルと行ベクトルをあわせてベクトルという。

$$\text{ベクトル} \begin{cases} \text{列ベクトル} \\ \text{行ベクトル} \end{cases}$$

さて、ベクトルの成分の数は2つ以上でも構わない。ところで、列ベクトルも行ベクトルも内容は同じである。ただ、線形性を話題にすると、列ベクトルを使う方が多い。

1.4 連立1次方程式

ベクトルを使う例として、連立1次方程式がある。

例

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

これは次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 5x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y \\ 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

よって、

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

一般に、

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} ax \\ cx \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} by \\ dy \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

さらに、 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおけば、連立1次方程式は次のように表わせる。

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{p}$$

2 線形性

2.1 線形性

$f(x)$ が、次のような性質をもつとする。

$$\begin{aligned} (1) f(kx) &= kf(x) \\ (2) f(x+y) &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

このような性質を 線形性 という。線形性とはこれだけである。単純だ。そこで、これから線形性を満たす具体例を挙げていく。

2.2 1 次形式

$$2x, 2x + 3y, 2x + 3y + 4z$$

のように、定数項のない一次式を 斉一次式、または 一次形式という。一般に、

$$ax, ax + by, ax + by + cz$$

のように表わす。これらは線形性をもつ。

2.2.1 $y = ax$

座標平面上で、 $y = ax$ は、原点を通り、傾きが a の直線の方程式である。ここで、

$$f(x) = ax$$

とおく。この f は線形性をもつ。これを示す。

$f(x) = ax$ より、

$$(1) f(kx) = a(kx) = k(ax) = kf(x)$$

$$(2) f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

このように、2つの性質を満たしているから f は線形性をもつ。さて、このとき f と a を同一視することができる。

2.2.2 $z = ax + by$

$z = ax + by$ を考える。この式では、 x と y が変数である。だから次のように表わす。

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$$

さて、この場合の線形性は、 x と y をひとまとめにして考える。

$$\begin{aligned} (1) f\left(k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= kf\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (2) f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さて、こんなわけで、

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$$

と約束する。そうすれば次のようになる。

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この場合、 f は、 $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ と同一視できる。さて、 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表せば、線形性は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} (1) f(k\vec{x}) &= kf(\vec{x}) \\ (2) f(\vec{x} + \vec{y}) &= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \end{aligned}$$

さらに、 $A = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ とおけば、次のようになる。

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

2.2.3 $w = ax + by + cz$

$w = ax + by + cz$ を考える。このとき、 x, y, z が変数となる。

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

である。この f も線形性をもつ。そこで次のように約束する。

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

すると、次のように表せる。

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

また、 $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ とおけば、次のようになる。

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

2.2.4 連立1次方程式

次のような連立方程式を考える。

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

線形性を持つのは左辺である。よって、左辺を次のように表わす。

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

この場合の線形性は次のように考える。 x, y が独立変数となっているから、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように考える。よって、

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

となる。線形性を示そう。

$$\begin{aligned} (1) \quad f \left(k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) &= f \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(kx) + b(ky) \\ c(kx) + d(ky) \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = kf \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ (2) \quad f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) &= f \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これで、線形性がいえた。そんなわけで、次のように約束する。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

よって、次のようになる。

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

さて、 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおけば、次のようになる。

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

2.2.5 行列

ここまで出てきた、

$$(a \ b), (a \ b \ c), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のように、数を長方形に並べたものを行列という。一般に、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

と表わせば、

$$f(\vec{x}) = A\vec{x}$$

は線形性をもつ。このとき、 f は A と同一視できる。

2.3 微分・積分

線形性を次のように表わす。

$$\begin{aligned} (1) f(ky) &= kf(y) \\ (2) f(y_1 + y_2) &= f(y_1) + f(y_2) \end{aligned}$$

ここでの y は、 $y = 2x + 5$ のような、 x の関数とする。

2.3.1 $\frac{d}{dx}$

$f(y) = y'$ としたとき、 f は線形性をもつ。これを示す。

$$(1) f(ky) = (ky)' = ky' = kf(y)$$

$$(2) f(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = f(y_1) + f(y_2)$$

これは、微分の性質である。さて、こんなわけで

$$y' = \frac{d}{dx}y$$

とすれば、

$$f(y) = \frac{d}{dx}y$$

となり、 f と $\frac{d}{dx}$ を同一視できる。また、 $D = \frac{d}{dx}$ とおけば、次のようになる。

$$f(y) = Dy$$

2.3.2 $\frac{d^2}{dx^2}$

$f(y) = y''$ としたとき、 f は線形性をもつ。そんなわけで、

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}y$$

とすれば、

$$f(y) = \frac{d^2}{dx^2}y = D^2y$$

と表わせる。

2.3.3 $\lim_{x \rightarrow a}$

$$f(y) = \lim_{x \rightarrow a} y$$

これも線形性を満たす。これは、次の極限の計算からわかる。

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} ky = k \lim_{x \rightarrow a} y$
 (2) $\lim_{x \rightarrow a} (y_1 + y_2) = \lim_{x \rightarrow a} y_1 + \lim_{x \rightarrow a} y_2$

2.3.4 $\int dx$

$$f(y) = \int y dx$$

これも線形性を満たす。これは、次の積分の計算からわかる。

- (1) $\int ky dx = k \int y dx$
 (2) $\int (y_1 + y_2) dx = \int y_1 dx + \int y_2 dx$

2.3.5 $\sum$

$\sum$ も線形性を満たす。

- (1) $\sum ka_n = k \sum a_n$
 (2) $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

2.4 線形微分

2.4.1 線形微分方程式

$$y' + ay = Q(x)$$

$$y'' + ay' + b = Q(x)$$

のような方程式を線形微分方程式という。この左辺は線形性をもつ。

2.4.2 $y' + ay$

$f(y) = y' + ay$ とおくと、 f は線形性をもつ。これを示す。

- (1) $f(ky) = (ky)' + a(ky) = ky' + kay = k(y' + ay) = f(ky)$
 (2) $f(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)' + a(y_1 + y_2) = y_1' + ay_1 + y_2' + ay_2 = f(y_1) + f(y_2)$

さて、こんなわけで

$$y' + ay = \frac{d}{dx}y + ay = \left(\frac{d}{dx} + a \right) y$$

と約束すれば、

$$f(y) = \left(\frac{d}{dx} + a \right) y$$

と表わせる。よって、 f と $\frac{d}{dx} + a$ を同一視できる。また、 $\frac{d}{dx} = D$ とおけば

$$f(y) = (D + a)y$$

と表せる。

例 $y' + 3y = \left(\frac{d}{dx} + 3 \right) y = (D + 3)y$

2.4.3 $y'' + ay' + by$

$f(y) = y'' + ay' + by$ とおけば、 f は線形性をもつ。そんなわけで、

$$y'' + ay' + by = \frac{d^2}{dx^2}y + a\frac{d}{dx}y + by = \left(\frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b \right) y$$

と約束すれば、

$$f(y) = \left(\frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b \right) y$$

と表わせる。また、 $\frac{d}{dx} = D$ とおけば

$$f(y) = (D^2 + aD + b)y$$

と表せる。

例 $y'' + y' - 6y = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - 6 \right) y = (D^2 + D - 6)y$

2.4.4 $(D - \alpha)(D - \beta)y$

さて、 $(D - 2)(D + 3)y$ を考える。これは、 $(D - 2)((D + 3)y)$ のように考えればよい。

$$\begin{aligned} (D - 2)(D + 3)y &= (D - 2)(Dy + 3y) = D(Dy + 3y) - 2(Dy + 3y) \\ &= D^2y + 3Dy - 2Dy - 6y = D^2y + Dy - 6y \\ &= y'' + y' - 6y = (D^2 + D - 6)y \end{aligned}$$

同様に、 $(D + 3)(D - 2)y$ を考える。

$$\begin{aligned}
(D+3)(D-2)y &= (D+3)(Dy-2y) = D(Dy-2y) + 3(Dy-2y) \\
&= D^2y - 2Dy + 3Dy - 6y = D^2y + Dy - 6y \\
&= y'' + y' - 6y = (D^2 + D - 6)y
\end{aligned}$$

これより、

$$D^2 + D - 6 = (D-2)(D+3) = (D+3)(D-2)$$

がいえる。一般に次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} - \beta\right)y &= \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx}y - \beta y\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y - \beta y\right) - \alpha\left(\frac{d}{dx}y - \beta y\right) \\
&= \frac{d^2}{dx^2}y - \beta\frac{d}{dx}y - \alpha\frac{d}{dx}y + \alpha\beta y = \left(\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha + \beta)\frac{d}{dx} + \alpha\beta\right)y
\end{aligned}$$

となる。よって、 $a = -(\alpha + \beta)$, $b = \alpha\beta$ とおけば、

$$\frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx} + b = \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} - \beta\right)$$

がいえる。そんなわけで、 $\frac{d}{dx} = D$ とおいて、

$$D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$$

がいえる。勿論、

$$f(y) = (D - \alpha)(D - \beta)y$$

は線形性をもつ。

2.4.5 線形微分方程式を解く仕組み

$$y'' + ay' + b = Q(x)$$

を解く方法を示す。まず、

$$(D^2 + aD + b)y = Q(x)$$

と表わす。これが、 $D^2 + aD + b = (D - \alpha)(D - \beta)$ となっているとする。すると次のようになる。

$$(D - \alpha)(D - \beta)y = Q(x)$$

ここで、 $v = (D - \beta)y$ とおけば、

$$(D - \alpha)v = Q(x)$$

$$v' - \alpha v = Q(x)$$

となる。よって、 $y' + ay = Q(x)$ の形に帰着する。よって、これが解ければよいことがわかる。実際に解くのは別の機会とする。

3 複線形性

3.1 複線形性

$f(x, y)$ が、 x について線形性を持ち、かつ、 y についても線形性をもつとき、この性質を複線形性という。

3.2 $f(x, y) = axy$

$f(x, y) = axy$ という式において、

$$\varphi(x) = f(x, y)$$

とおけば、 $\varphi(x)$ は線形性を満たす。 y についても同様である。

3.3 $f(x, y, z) = axyz$

$f(x, y, z) = axyz$ という式において、

$$\varphi(x) = f(x, y, z)$$

とおけば、 $\varphi(x)$ は線形性を満たす。 y, z についても同様である。

3.4 $ad - bc$

$ad - bc$ について考える。これは行列式である。これは、 a, b, c, d が独立変数なので、次のようにおく。

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

さて、この線形性は次のように考える。

$$\varphi \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = ad - bc = (d \quad -b) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

よって、この φ は線形性をもつ。同じように $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ で考えても線形性を満たす。よって、複線形性を満たす。さて、こんなわけで次のように表わす。

$$ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

よって次のようになる。

$$\boxed{f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

また、 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, とおけば次のように表わせる。

$$f(\vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{a}, \vec{b})$$

4 交代性

線形性と関係ない交代性という性質をみておく。これは、次の話の準備である。

4.1 交代性

$f(x, y)$ が次のように、 x と y を入れ替えると符号が変わる性質を 交代性 という。

$$f(y, x) = -f(x, y)$$

$f(x, y, z)$ の場合は、任意の 2 つを入れ替えると符号が変わる性質を交代性という。

$$\begin{aligned} f(y, x, z) &= -f(x, y, z) \\ f(x, z, y) &= -f(x, y, z) \\ f(z, y, x) &= -f(x, y, z) \end{aligned}$$

4.2 $x - y$

$f(x, y) = x - y$ は交代性を満たす。これを示す。

$$f(y, x) = y - x = -(x - y) = -f(x, y)$$

4.3 $(x - y)(y - z)(z - x)$

$f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)$ は交代性を満たす。

4.4 $ad - bc$

$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ の交代性は、 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のように、まとめて考える。

$$f \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおけば次のようになる。

$$f(\vec{b}, \vec{a}) = -f(\vec{a}, \vec{b})$$

4.5 交代性の性質

$f(x, y)$ が交代性を満たしているとき、次がいえる。

$$f(x, y) \text{ が交代性を持てば、} f(x, x) = 0$$

5 連立 1 次方程式の解を求める仕組み

ここでは、連立 1 次方程式の解を求める仕組みを示す。それは、具体的な連立 1 次方程式の解を求めることではない。クラメールの公式の本質を示すことである。

5.1 交代複線形関数

関数 f が、複線形性を満たし、かつ交代性を満たしているとき、交代複線形関数という。この関数は、連立 1 次方程式の解を求める仕組みを示してくれる。それは、文字消去である。

5.2 連立 2 元 1 次方程式

連立 2 元 1 次方程式を、次のように表わす。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \cdots \\ a_2x + b_2y = p_2 \cdots \end{cases}$$

この連立方程式の解を求める仕組みをみていく。解くのは、文字消去による。ここで、

$$\Delta \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

を交代複線形関数とする。さて、大切なことは、この関数の具体的な式は必要ないことである。まず、

$$\begin{cases} f_1 = a_1x + b_1y - p_1 = 0 \\ f_2 = a_2x + b_2y - p_2 = 0 \end{cases}$$

とおく。ここで $\Delta \begin{pmatrix} f_1 & b_1 \\ f_2 & b_2 \end{pmatrix}$ を計算する。

$$\begin{aligned} \Delta \begin{pmatrix} f_1 & b_1 \\ f_2 & b_2 \end{pmatrix} &= \Delta \begin{pmatrix} a_1x + b_1y - p_1 & b_1 \\ a_2x + b_2y - p_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= \Delta \begin{pmatrix} a_1x & b_1 \\ a_2x & b_2 \end{pmatrix} + \Delta \begin{pmatrix} b_1y & b_1 \\ b_2y & b_2 \end{pmatrix} - \Delta \begin{pmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= x\Delta \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + y\Delta \begin{pmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{pmatrix} - \Delta \begin{pmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{pmatrix} \\ &= x\Delta \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} - \Delta \begin{pmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

途中 $\Delta \begin{pmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ より、 y が消去されるのがわかる。また、 $\Delta \begin{pmatrix} f_1 & b_1 \\ f_2 & b_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = 0$ より、

$$x\Delta \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

ここで、 $\Delta \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ ならば、
$$x = \frac{\Delta \begin{pmatrix} p_1 & b_1 \\ p_2 & b_2 \end{pmatrix}}{\Delta \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}$$

同様に $\Delta \begin{pmatrix} a_1 & f_1 \\ a_2 & f_2 \end{pmatrix}$ を計算すれば、 x が消去され、
$$y = \frac{\Delta \begin{pmatrix} a_1 & p_1 \\ a_2 & p_2 \end{pmatrix}}{\Delta \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}$$
 が得られる。

これがクラメールの公式である。勿論、このままでは実際の解を求めることはできない。しかし $\Delta \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ を見つける話は別の機会にする。解を求める仕組みはわかることが目的である。

5.3 連立2元1次方程式(2)

前回のを、ベクトルを用いて表してみる。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \cdots \\ a_2x + b_2y = p_2 \cdots \end{cases}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

とおけば、連立1次方程式は次のように表せる。

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{p}$$

そして、

$$\vec{f} = x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{p} = \vec{0}$$

とおく。ここで、交代複線形関数を次のように表わす。

$$\Delta(\vec{a}, \vec{b})$$

最初に、 $\Delta(\vec{f}, \vec{b})$ を計算する。

$$\Delta(\vec{f}, \vec{b}) = \Delta(x\vec{a} + y\vec{b} - \vec{p}, \vec{b}) = x\Delta(\vec{a}, \vec{b}) + y\Delta(\vec{b}, \vec{b}) - \Delta(\vec{p}, \vec{b}) = 0$$

$\Delta(\vec{b}, \vec{b}) = 0$ より、 y が消去される。

$$x\Delta(\vec{a}, \vec{b}) = \Delta(\vec{p}, \vec{b})$$

次に、 $\Delta(\vec{a}, \vec{p})$ を計算する。今度は x が消去され、次が得られる。

$$y\Delta(\vec{a}, \vec{b}) = \Delta(\vec{a}, \vec{p})$$