

目次

1	微分	2
1.1	微分	2
1.1.1	連続	2
1.1.2	微分係数	2
1.1.3	微分	2
1.2	2次微分	3
1.2.1	連続	3
1.2.2	導関数	3
1.2.3	微分	3
1.2.4	2次微分係数	3
1.2.5	2次微分	4
1.2.6	2次導関数	4
1.2.7	2次微分	4
1.3	n 次微分	5
1.3.1	n 次微分係数	5
1.3.2	n 次微分	5
1.3.3	n 次導関数	5
1.3.4	n 次微分	5
1.4	微分のまとめ	6
1.4.1	連続	6
1.4.2	微分係数	6
1.4.3	微分	6
1.4.4	n 次微分係数	6
1.4.5	n 次微分	6
1.5	無限小	7
1.5.1	無限小	7
1.5.2	ランダウの記号	7
1.5.3	連続・微分可能	7
1.6	実数の連続性	8
1.6.1	例1	8
1.6.2	例2	8
1.6.3	例3	8
1.7	速度	9
1.7.1	平均速度	9

1 微分

1.1 微分

1.1.1 連続

関数 $y = f(x)$ が、 $x = a$ で連続であるとは、

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$$

となるときである。これは、小さな h に対して、 $f(a + h) \approx f(a)$ ということである。ここで、

$$\epsilon(h) = f(a + h) - f(a)$$

とおけば、 $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ となる。よって、関数 $y = f(x)$ が、 $x = a$ で連続であるとは、

$$f(a + h) = f(a) + \epsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

と書くこともできる。

1.1.2 微分係数

関数 $y = f(x)$ は、 $x = a$ で連続であるとする。このとき、関数 $y = f(x)$ が、 $x = a$ で微分可能であるとは、

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

($x = a$ で連続と仮定したから、分子も小さくなり、不定形 $\frac{0}{0}$ になる)

と、極限値が存在するときである。この $f'(a)$ を $x = a$ における微分係数という。これは、小さな h に対して、 $f'(a) \approx \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ ということである。ここで、

$$\epsilon(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

とおけば、 $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ となる。よって、関数 $y = f(x)$ が、 $x = a$ で微分可能であるとは、

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

と書くこともできる。さらに、

$$f(a + h) = f(a) + \alpha h + h\epsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

を満たす定数 α があれば、 $f'(a) = \alpha$ ということである。。

1.1.3 微分

関数 $y = f(x)$ の、 $x = a$ における接線の傾きは、 $f'(a)$ である。 x の増分を dx 、 y の増分を、 $df(a)$ とすれば、

$$f'(a) = \frac{df(a)}{dx}$$

となる。この $df(a)$ を $x = a$ における微分という。

1.2 2次微分

1.2.1 連続

関数 $y = f(x)$ が、区間 (a, b) で連続であるとは、その区間にあるすべての x に対して

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

となることである。これは、

$$f(x+h) = f(x) + \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

とも書ける。

1.2.2 導関数

関数 $y = f(x)$ が、区間 (a, b) で連続であるとする。このとき、その区間で微分可能であるとは、その区間にあるすべての x に対して

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と、極限值が存在するときである。これは、

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

とも書ける。この $f'(x)$ を関数 $y = f(x)$ の導関数という。

1.2.3 微分

関数 $y = f(x)$ の、 x における接線の傾きは、 $f'(x)$ である。 x の増分を dx 、 y の増分を、 $df(x)$ とすれば、

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

となる。この $df(x)$ を x における微分という。

1.2.4 2次微分係数

関数 $y = f'(x)$ が、 $x = a$ で連続であるとする。このとき、 $x = a$ で微分可能であるとは、

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$$

と、極限值が存在するときである。これは、

$$f'(a+h) = f'(a) + hf''(a) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

とも書ける。この $f''(a)$ を2次微分係数という。

1.2.5 2次微分

関数 $y = f'(x)$ の、 $x = a$ における接線の傾きは、 $f''(a)$ である。 x の増分を dx 、 y の増分を、 $df'(a)$ とすれば、

$$f''(a) = \frac{df'(a)}{dx}$$

となる。さらに、つぎのような計算をする。

$$f''(a) = \frac{d \frac{df(a)}{dx}}{dx} = \frac{ddf(a)}{dx} = \frac{ddf(a)}{dxdx} = \frac{d^2 f(a)}{dx^2}$$

この $d^2 f(a)$ を2次微分という。

1.2.6 2次導関数

関数 $y = f'(x)$ が、区間 (a, b) で連続であるとする。このとき、その区間で微分可能であるとは、その区間にあるすべての x に対して

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

と、極限值が存在するときである。これは、

$$f'(x+h) = f'(x) + hf''(x) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

とも書ける。この $f''(x)$ を関数 $y = f(x)$ の2次導関数という。

1.2.7 2次微分

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

この $d^2 f(x)$ を2次微分という。

1.3 n 次微分

1.3.1 n 次微分係数

関数 $y = f^{(n-1)}(x)$ が、 $x = a$ で連続であるとする。このとき、 $x = a$ で微分可能であるとは、

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h}$$

と、極限值が存在するときである。これは、

$$f^{(n-1)}(a+h) = f^{(n-1)}(a) + hf^{(n)}(a) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

とも書ける。この $f^{(n)}(a)$ を n 次微分係数という。

1.3.2 n 次微分

$$f^{(n)}(a) = \frac{d^n f(a)}{dx^n}$$

この $d^n f(a)$ を n 次微分という。

1.3.3 n 次導関数

関数 $y = f^{(n-1)}(x)$ が、区間 (a, b) で連続であるとする。このとき、その区間で微分可能であるとは、その区間にあるすべての x に対して

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

と、極限值が存在するときである。これは、

$$f^{(n-1)}(x+h) = f^{(n-1)}(x) + hf^{(n)}(x) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

とも書ける。この $f^{(n)}(x)$ を関数 $y = f(x)$ の n 次導関数という。

1.3.4 n 次微分

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

この $d^n f(x)$ を n 次微分という。

1.4 微分のまとめ

1.4.1 連続

関数 $y = f(x)$ が、 $x = a$ で連続であるとは、

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$
$$f(a+h) = f(a) + \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

また、 $x = a+h$ とおけば、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$
$$f(x) = f(a) + \varepsilon(x-a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0$$

とも書ける。

1.4.2 微分係数

関数 $y = f(x)$ は、 $x = a$ で連続であるとする。このとき、 $x = a$ で微分可能であるとは、

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

また、 $x = a+h$ とおけば、

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x-a), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x-a) = 0$$

とも書ける。

1.4.3 微分

$x = a$ における微分とは、

$$df(a) = f'(a)dx$$

1.4.4 n 次微分係数

数学的帰納法のように繰り返して、

$$f''(a), f^{(3)}(a), \dots, f^{(n)}(a)$$

$f^{(n)}(a)$ が存在すれば、 n 次微分係数という。

1.4.5 n 次微分

n 次微分 $d^n f(a)$ をは、

$$d^n f(a) = f^{(n)}(a)dx^n$$

1.5 無限小

1.5.1 無限小

関数 $y = f(x)$ が、 $x = a$ で連続、微分可能なら、

$$f(a+h) = f(a) + \varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (1)$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \quad (2)$$

となる。このように、0 に収束する h を無限小という。 $\varepsilon(h)$ も無限小である。

1.5.2 ランダウの記号

(2) の $h\varepsilon(h)$ も無限小である。ただ、 $g(h) = h\varepsilon(h)$ とおけば、 $\frac{g(h)}{h} = \varepsilon(h)$ より、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$$

となる。 $g(h)$ は無限小かつ、無限小 h で割っても無限小である。さらに、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = 0, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^3} = 0, \dots$$

となるかもしれない。一般に、 h^α で割っても無限小になる無限小を $o(h^\alpha)$ と書く。これを、ランダウの記号という。即ち、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^\alpha)}{h^\alpha} = 0$$

となる。

1.5.3 連続・微分可能

(1), (2) は、

$$f(a+h) = f(a) + o(1)$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + o(h)$$

と書ける。

1.6 実数の連続性

1.6.1 例 1

$$y = \frac{1}{x}$$

この関数の定義域は、 $x \neq 0$ である。よって、連続を考えるときは、区間 $(-\infty, 0)$ で連続、区間 $(0, \infty)$ でも連続であると考ええる。

1.6.2 例 2

$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

この関数の定義域は、 $x \neq 0$ である。よって、2つの区間 $(-\infty, 0)$ 、 $(0, \infty)$ それぞれで連続である。ただ、例 1 と違い、 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ となるから、

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

という関数については、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ が成り立つから、 $(-\infty, \infty)$ で連続となる。

1.6.3 例 3

$$y = x \quad (x \neq 0)$$

これも、2つの区間 $(-\infty, 0)$ 、 $(0, \infty)$ それぞれで連続である。例 2 と同じように、

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

という関数については、 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ が成り立つから、 $(-\infty, \infty)$ で連続となる。

これは、たった1つの点で $(-\infty, \infty)$ での連続を考えることができなくなるということである。

さらに、実数を $(-\infty, a]$ 、 (a, ∞) 、または、 $(-\infty, a)$ 、 $[a, \infty)$ の2つの区間に分けられる。これは、実数の連続性の公理である。

1.7 速度

1.7.1 平均速度