

実数

概 要

実数は小数であると言えます。小数にすれば、実数の本質が見えてきます。特に無限小数は不思議です。ここではそんな世界を見ていきます。

目 次

1	$\frac{1}{3}$	2
1.1	$\frac{1}{3}$	2
1.2	1	3
2	$\sqrt{2}$	4
2.1	$\sqrt{2}$ の求め方	4
2.2	漸化式	4
2.3	値を求める	5
2.4	特性方程式	5
2.5	$\sqrt{k}$ の求め方	5
2.6	まとめ	5
3	π は無理数	6
3.1	考え方	6
3.2	証明	6
3.3	補講	8

$$1 \quad \frac{1}{3}$$

$$1.1 \quad \frac{1}{3}$$

$1 \div 3$ を計算すると、 $\frac{1}{3} = 0.3333 \dots$ が得られる。この右辺は、

$$0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

という数列が $\frac{1}{3}$ に近づくとっている。

a_n の添え字だけ書いてみると、 $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ となる。これは自然数である。いくらでも大きい自然数は存在する。そこで、 n をいくらでも大きくすることを、 $n \rightarrow \infty$ と書く。

a_n に戻ると、 n を限りなく大きくすると、 a_n は限りなく $\frac{1}{3}$ に近づくのである。これを、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$$

と書く。

さて、 a_n の値は増えていく。

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$

このとき、単調増加という。これより、値がいつまでも増えても無限にならないものがあるということになる。これは、 n がどんな値のときでも、 $a_n < \frac{1}{3}$ だからである。

次に、数列 a_n の階差数列を考える。

$$0.03, 0.003, 0.0003, 0.00003, \dots, b_n, \dots \quad (2)$$

b_n は単調減少している。

$$b_1 > b_2 > b_3 > \dots$$

これは、公比が 0.1 の等比数列だから、 0 に近づく。これを、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

と書く。今度は、 n がどんな値のときでも、 $b_n > 0$ である。

最後に、 $c_n = \frac{1}{3} - a_n$ という数列を考える。

$$0.0333 \dots, 0.00333 \dots, 0.000333 \dots, 0.0000333 \dots, \dots, c_n, \dots \quad (3)$$

これは、 $\frac{1}{30}, \frac{1}{300}, \frac{1}{3000}, \dots, c_n, \dots$ となるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - a_n \right) = 0$$

となる。同様にして、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{3} \right) = 0$ もいえるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| a_n - \frac{1}{3} \right| = 0$$

がいえる。

1.2 1

$\frac{1}{3} = 0.3333 \dots$ の両辺を 3 倍すると、

$$1 = 0.9999 \dots$$

が得られる。また、これに 1 を加えたり、10 で割ったりすれば、

$$2 = 1.9999 \dots$$

$$0.1 = 0.09999 \dots$$

が得られる。よって、0 を除いた有理数はすべて無限循環小数で表せることがわかる。また、小数で表そうとしたとき、2 通りに表せるものがあるということである。

2 $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$ であるが、この値を求めてみる。

2.1 $\sqrt{2}$ の求め方

$$\sqrt{2} = 1 + h \quad (0 < h < 1)$$

とおいて、両辺 2 乗する。

$$2 = (1 + h)^2$$

$$h^2 + 2h + 1 = 2$$

$$h(h + 2) = 1$$

$$h = \frac{1}{2 + h}$$

これを何度も使う。

$$\sqrt{2} = 1 + h = 1 + \frac{1}{2 + h} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + h}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + h}}} = \dots$$

連分数が得られた。

2.2 漸化式

次のような数列が得られる。

$$a_1 = 1 + h$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{2 + h} = 1 + \frac{1}{1 + a_1} = \frac{2 + a_1}{1 + a_1}$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + h}} = 1 + \frac{1}{1 + a_2} = \frac{2 + a_2}{1 + a_2}$$

よって、

$$a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n}$$

ゆえに、次の漸化式が得られる。

$$\begin{cases} a_1 = 1 + h \\ a_{n+1} = \frac{2 + a_n}{1 + a_n} \end{cases}$$

この一般項は、

$$a_n = \sqrt{2} \frac{1 + \frac{a_1 - \sqrt{2}}{a_1 + \sqrt{2}} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^{n-1}}{1 + \frac{a_1 - \sqrt{2}}{a_1 + \sqrt{2}} \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)^{n-1}}$$

となるから、 h の値は 0 でも 1 でも $\sqrt{2}$ に収束することがわかる。

2.3 値を求める

$h = 0$ として漸化式を使って求める。

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2} = 1.5, a_3 = \frac{7}{5} = 1.4, a_4 = \frac{17}{12} = 1.4166\cdots, a_5 = \frac{41}{29} = 1.4137\cdots, \\ a_6 = \frac{99}{70} = 1.41428\cdots, a_7 = \frac{239}{169} = 1.41420\cdots, a_8 = \frac{577}{408} = 1.414215\cdots, a_9 = \frac{1393}{985} = 1.4142131\cdots,$$

2.4 特性方程式

漸化式の特性方程式は、

$$x = \frac{2+x}{1+x}$$

式変形して、 $x(1+x) = 2+x$

$$x + x^2 = 2 + x$$

$$x^2 = 2$$

ゆえに、 $x > 0$ として $x = \sqrt{2}$ となる。

2.5 $\sqrt{k}$ の求め方

$\sqrt{2}$ の特性方程式でやったことの逆をやればよい。

$$x = \sqrt{k}$$

$$x^2 = k$$

$$x + x^2 = k + x$$

$$x(1+x) = k+x$$

$$x = \frac{k+x}{1+x}$$

よって、漸化式が得られる。

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \frac{k + a_n}{1 + a_n} \end{cases}$$

この一般項は、

$$a_n = \sqrt{k} \frac{1 + \frac{a_1 - \sqrt{k}}{a_1 + \sqrt{k}} \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^{n-1}}{1 + \frac{a_1 - \sqrt{2}}{a_1 + \sqrt{k}} \left(\frac{1 - \sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}} \right)^{n-1}}$$

不思議だが、これを見ると a_1 は 0 でも 1 でも何でもよいことがわかる。

2.6 まとめ

$\sqrt{2}$ は無限小数になる。小数の先は見えなくとも、連分数や漸化式によって規則性を見出すことができた。

3 π は無理数

π は無理数であることの証明。

3.1 考え方

背理法で示す。 π が有理数であると仮定し、 $\pi = \frac{q}{p}$ (p, q は自然数) とおく。

$0 < x < \frac{q}{p}$ なる x について、 $f(x) = \frac{1}{n!}x^n(q - px)^n$ を考える。そして、 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx$ の値が整数になったり、小数になったりするので矛盾。

3.2 証明

π が有理数であると仮定する。すると、 $\pi = \frac{q}{p}$ (p, q は自然数) とおける。

$0 < x < \frac{q}{p}$ なる x について、 $f(x) = \frac{1}{n!}x^n(q - px)^n$ を考える。

$f(x)$ を展開したとき、

$$f(x) = \frac{1}{n!}(A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + A_{n+2} x^{n+2} + \cdots + A_{2n} x^{2n})$$

とおく。各 A_k は整数である。

$f(x)$ は、 x^n から x^{2n} までであるから、 $f(x), f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ までは、 x が残るので、 $f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ となる。

$f^{(n)}(x)$ から $f^{(2n)}(x)$ までは、 $n!, (n+1)!, \dots, (2n)!$ が微分するとき出てくるから、 $\frac{1}{n!}$ で割り切れるから、 $f^{(n)}(0), f^{(n+1)}(0), \dots, f^{(2n)}(0)$ はすべて整数になる。

$f^{(2n+1)}(x)$ から後はすべて 0 になる。

以上から、 $f(0), f'(0), f''(0), \dots$ はすべて整数になる。

次に、 $f(x) = f(\frac{q}{p} - x)$ を示す。

$$\begin{aligned} f(\frac{q}{p} - x) &= \frac{1}{n!}(\frac{q}{p} - x)^n(q - p(\frac{q}{p} - x))^n \\ &= \frac{1}{n!}(\frac{q}{p} - x)^n(q - q + px)^n \\ &= \frac{1}{n!}(\frac{q}{p} - x)^n(px)^n \\ &= \frac{1}{n!}(q - px)^n(x)^n \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$f(x) = f(\frac{q}{p} - x)$ を微分する。

$$f'(x) = (-1)f'(\frac{q}{p} - x)$$

$$f''(x) = (-1)^2 f''\left(\frac{q}{p} - x\right)$$

$$f'''(x) = (-1)^3 f'''(\frac{q}{p} - x)$$

⋮

ここで、 $x = \pi$ を代入する。

$$f(\pi) = f(0)$$

$$f'(\pi) = (-1)f'(0)$$

$$f''(\pi) = (-1)^2 f''(0)$$

$$f'''(\pi) = (-1)^3 f'''(0)$$

⋮

ゆえに、 $f(\pi), f'(\pi), f^{(2)}(\pi), \dots$ もすべて整数になる。

次に、 $F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - f^{(6)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$ を考える。

$F(0)$ と $F(\pi)$ は整数になる。

$$F'(x) = f'(x) - f^{(3)}(x) + f^{(5)}(x) - f^{(7)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n+1)}(x)$$

$$F''(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - f^{(8)}(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)$$

よって、

$$F(x) + F''(x) = f(x) + (-1)^n f^{(2n+2)}(x) = f(x)$$

$\frac{d}{dx}(F'(x) \sin x - F(x) \cos x) = f(x) \sin x$ が成り立つ。なぜなら、

$$\text{左辺} = F''(x) \sin x + F'(x) \cos x - F'(x) \cos x + F(x) \sin x = (F''(x) + F(x)) \sin x = f(x) \sin x$$

ゆえに、 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]_0^\pi = F(\pi) + F(0)$ がいえる。

よって、この積分の値は整数であることがいえた。

また、 $f(x) \sin x = \frac{1}{n!} x^n (q - px)^n \sin x$ より、 $0 < x < \pi$ において、

$$0 < f(x) \sin x < \frac{1}{n!} \pi^n q^n$$

積分する。

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < \int_0^\pi \frac{1}{n!} \pi^n q^n dx = \frac{1}{n!} \pi^{n+1} q^n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \pi^{n+1} q^n = 0$ だから、 n が十分大きければ、

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx < 1$$

を満たす。

これは、積分の値が整数ではない。よって、矛盾を導いた。」

3.3 補講

$a > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ を示す。

$\frac{a}{N} < \frac{1}{2}$ なる N を考える。

$N < n$ なる n に対して、

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^N}{N!} \frac{a^{n-N}}{(N+1)(N+2) \cdots n} < \frac{a^N}{N!} \frac{a^{n-N}}{N^{n-N}} < \frac{a^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$ より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$